MIDTOETS CALCULUS II, 2012

Vrijdag 16 maart, 9.00–11.00

U dient al uw antwoorden duidelijk te motiveren.
Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is niet toegestaan. Succes !

(1) Toon aan dat de volgende reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \sin \frac{1}{n}$$

convergent is. Is de reeks ook absoluut convergent ?

(2) De rij $\{a_n\}$ is recursief gedefinieerd door

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{\ln n + 2} a_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

(a) Toon aan dat de rij $\{a_n\}$ convergeert.
(b) Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
(c) Bepaal of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wel of niet convergeert.

(3) Beschouw de functie

$$f(x) = \frac{1}{6-x}$$

(a) Bereken de Taylorreeks van $f(x)$ om het punt $x = 5$. Voor welke x convergeert deze Taylorreeks ?
(b) Bepaal op basis van het vorige onderdeel de Taylorreeks van $g(x) = \ln(6-x)$ om $x = 5$.

(4) Beschouw de functie gedefinieerd op $(-\pi, \pi]$ als

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0, \pi] \\ -2, & x \in (-\pi, 0] \end{cases},$$

en periodiek voortgezet op $\mathbb{R}$.

(a) Bepaal de Fouriercoefficienten b_n van de Fourierreeks $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ van $f(x)$.
(b) Bewijs dat de Fouriercoefficienten $a_n, n = 0, 1, 2, \cdots$, allemaal 0 zijn.
(c) Is $f(0)$ gelijk aan de waarde van de Fourierreeks in $x = 0$?

(5) Schets de parametrische kromme

$$x = e^t - t, \quad y = 4e^{\frac{t}{2}}, \quad -8 \le t \le 3$$

Bereken de booglengte van deze kromme.